

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	15
Введение	17
Глава первая. Векторы. Параллельные проекции	
I. Отрезок, ось, вектор	19
§ 1. Отрезок (19).— § 2. Ось (19).— § 3. Векторы (20).— § 4. Равенство векторов (21).— § 5. Векторы: свободный, скользящий и связанный (21).	
II. Сумма векторов. Произведение вектора и числа	22
§ 6. Об операциях сложения и умножения (22).— § 7. Сумма векторов (23).— § 8. Частные случаи (25).— § 9. Разность векторов (27).— § 10. Произведение вектора и числа (28).— § 11. Векторы, параллельные данному направлению. Орты (31).— § 12. Векторы на оси (32).	
III. Проекция на ось и на плоскость	33
§ 13. Проекция на ось (33).— § 13а. Проекция фигур, расположенных в одной и той же плоскости (35).— § 14. Проекция на плоскость (35).— § 15. Проекция суммы и разности векторов на ось (36).— § 16. Проекция суммы и разности векторов на плоскость (38).— § 17. Проекция произведения вектора и числа (38).	
IV. Формулы для вычисления прямоугольных проекций	38
§ 18. Угол между двумя направлениями (39).— § 19. Формула для вычисления прямоугольной проекции вектора на ось (39).— § 19а. Обобщение (40).— § 20. Длина прямоугольной проекции вектора на плоскость (42).— § 21. Площадь проекции плоской фигуры на плоскость (42).	
V. Скалярное и векторное произведения двух векторов	45
§ 22. Скалярное произведение двух векторов (45).— § 23. Выражение прямоугольной проекции вектора через скалярное произведение (48).— § 24. Правая и левая системы трех направлений (48).— § 25. Векторное произведение двух векторов (49).— § 26. Смешанное произведение трех векторов (52).	

Глава вторая. Координаты вектора и точки

- I. Декартовы координаты 56
- § 27. Координаты на прямой оси (56).— § 28. Координаты вектора и точки на плоскости (58).— § 29. Прямоугольные координаты на плоскости (61).— § 30. Координаты вектора и точки в пространстве (62).— § 31. Прямоугольные координаты в пространстве (65).— § 32. Разложение вектора по данным направлениям (66).— § 33. Обобщенные декартовы координаты (68).
- II. Основные аффинные формулы 70
- § 34. Координаты суммы данных векторов (71).— § 35. Определение вектора по заданным началу и концу (72).— § 36. Координаты произведения вектора и числа (73).— § 37. Условие параллельности двух векторов (74).— § 37а. Условие параллельности двух векторов (продолжение) (76).— § 38. Условие коллинеарности трех точек (77).— § 39. Условие компланарности трех векторов (78).— § 40. Условие компланарности четырех точек (80).— § 41. Деление отрезка в данном отношении (81).
- III. Основные метрические формулы в прямоугольных координатах 84
- § 42. Скалярное произведение двух векторов (84).— § 43. Длина вектора. Углы, составляемые вектором с осями координат. Расстояние между двумя точками (85).— § 44. Координаты орта. Косинусы направления (87).— § 45. Угол между двумя векторами (направлениями) (88).— § 46. Условие перпендикулярности двух векторов (направлений) (89).— § 47. Определенные направления на плоскости (90).— § 48. Определение угла между двумя направлениями на плоскости, когда углу приписывается знак (99).— § 49. Площадь треугольника, построенного на двух векторах, приложенных к одной точке (95).— § 50. Площадь треугольника, заданного своими вершинами (97).— § 51. Векторное произведение двух векторов (97).— § 52. Смешанное произведение трех векторов. Объем параллелепипеда (99).— § 53. Объем тетраэдра, заданного координатами вершин (102).
- IV. Основные метрические формулы в обобщенных декартовых координатах 102
- § 54. Ковариантные и контравариантные декартовы координаты (102).— § 55. Зависимость между ковариантными и контравариантными координатами (104).— § 56. Выражения для скалярного произведения двух векторов, длины вектора, расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями (106).— § 57. Координаты и косинусы направления в необобщенных косоугольных координатах (108).
- V. Различные системы координат 110
- § 58. Система полярных координат на плоскости (110).— § 59. Обобщение (111).— § 60. Преобразование полярных координат на плоскости в декартовы (112).— § 61. Полярные координаты в пространстве (114).— § 62. Полуполярные (цилиндрические) координаты (115).— § 63. Общий метод координат (115).
- Глава третья. Преобразование декартовых координат. Движения и аффинные преобразования
- I. Общие формулы преобразования декартовых координат 118
- § 64. Перенесение начала (118).— § 65. Изменение координатных векторов (119).— § 66. Общий случай (122).— § 67. При-

ложения (125).— § 68. Преобразование ковариантных координат (128).	
II. Важнейшие частные случаи преобразования координат	129
§ 69. Преобразование прямоугольных координат на плоскости (129).— § 70. Преобразование прямоугольных координат в пространстве (133).— § 71. Соотношения между коэффициентами формул преобразования прямоугольных координат (135).— § 72. Ортогональные подстановки. Алгебраический вывод формул предыдущего параграфа (139).— § 73. Углы Эйлера (140).— § 74. Преобразование необобщенных косоугольных координат на плоскости (144).	
III. Движения и аффинные преобразования	154
§ 75. Движения (145).— § 76. Аффинные преобразования (148).— § 77. Подобные преобразования и движения как частные случаи аффинного преобразования (155).— § 78. О группах точечных преобразований. О классификации геометрических дисциплин (159).	
Глава четвертая. Об уравнении плоской линии.	
Прямая на плоскости	
I. Аналитическое представление линии на плоскости	162
§ 79. Уравнение линии (163).— § 80. Примеры: уравнения прямой линии и окружности (164).— § 81. Параметрическое представление линии (168).— § 82. Уравнение линии в различных системах координат (169).— § 83. Основные вопросы, связанные с аналитическим представлением линии (171).— § 84. Примеры различных линий (173).— § 85. Классификация плоских линий (179).— § 86. Распадающиеся и нераспадающиеся алгебраические линии (181).— § 87. О пересечении двух линий (182).	
II. Различные виды уравнения прямой	184
§ 88. Уравнение в коэффициентах направления. Параметрическое представление (184).— § 89. Приведенное уравнение прямой (187).— § 90. Общее уравнение прямой (189).— § 91. Частные случаи общего уравнения прямой (191).— § 92. Знак трехчлена $Ax + By + C$. (192).— § 93. Уравнение в отрезках на осях (193).— § 94. Построение прямой по заданному уравнению (194).— § 95. Геометрическое значение коэффициентов A и B в общем уравнении (194).— § 96. Нормальное уравнение прямой (196).	
III. Основные задачи на прямую	198
§ 97. Задача 1. Найти условия параллельности и совпадения двух заданных прямых (199).— § 98. Задача 2. Найти точку пересечения двух прямых (200).— § 99. Задача 3. Найти формулы перехода к новой декартовой системе, оси которой заданы уравнениями (202).— § 100. Задача 4. Найти точки пересечения данной прямой с данной кривой (203).— § 101. Задача 5. Найти угол между двумя данными прямыми (206).— § 102. Задача 6. Найти условие перпендикулярности двух прямых (208).— § 103. Задача 7. Найти расстояние данной точки до данной прямой (209).— § 104. Задача 8. Найти отношение, в котором данная прямая делит отрезок, соединяющий две данные точки (211).— § 105. Число независимых постоянных в уравнении прямой (211).— § 106. Пучок прямых (212).— § 107. Задача 9.	

Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данному направлению (214).— § 108. Задача 10. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (214).— § 109. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную к заданной прямой (214).— § 110. Задача 12. Найти прямую, проходящую через заданную точку и составляющую с заданной прямой заданный угол (215).— § 111. Общее уравнение прямых, проходящих через пересечение двух данных (216).— § 112. Задача 13. Найти прямую, проходящую через пересечение двух заданных прямых и через другую заданную точку (219).— § 113. Условие пересечения трех прямых в одной точке (220).— § 114. Задача 14. Найти уравнение прямой, проходящей через пересечение заданных прямых и имеющей заданное направление (222).— § 115. Геометрическое значение постоянной k (222).

Глава пятая. Прямая и плоскость в пространстве

- I. Уравнение поверхности. Уравнение линии 226
- § 116. Уравнение поверхности (226).— § 117. Уравнение сферы и кругового конуса в прямоугольных координатах (228).— § 118. Уравнение цилиндра (230).— § 119. Классификация поверхностей (231).— § 120. Уравнение линии (232).— § 121. Параметрическое представление линий и поверхностей (233).— § 122. О пересечении поверхностей и линий в пространстве (235).
- II. Уравнение плоскости 236
- § 123. Общее уравнение плоскости. Параметрическое представление (236).— § 124. Геометрическое значение коэффициентов A, B, C (239).— § 125. Частные случаи (239).— § 126. Знак четырехчлена $Ax + By + Cz + D$ (240).— § 127. Уравнение в отрезках на осях (240).— § 128. Построение плоскости, заданной уравнением (241).— § 129. Следы плоскости на плоскостях координат (243).— § 130. Условия параллельности и совпадения двух плоскостей (243).— § 131. Нормальное уравнение плоскости (245).
- III. Уравнения прямой в пространстве 246
- § 132. Уравнения в коэффициентах направления. Параметрическое представление (246).— § 133. Приведенные уравнения прямой (248).— § 134. Условия параллельности и совпадения двух прямых (250).— § 135. Уравнения прямой в общем виде (251).
- IV. Основные задачи на прямую и плоскость 253
- § 136. Задача 1. Найти пересечение двух плоскостей (253).— § 137. Задача 2. Найти пересечение трех плоскостей (254).— § 138. Задача 3. Найти формулы перехода к новой системе декартовых координат, плоскости которой заданы уравнениями (255).— § 139. Задача 4. Найти пересечение плоскости и прямой (256).— § 140. Задача 5. Найти пересечение: 1° данной поверхности и плоскости; 2° данной поверхности и прямой; 3° данной кривой и плоскости (257).— § 141. Задача 6. Найти углы между данными плоскостями или прямыми (259).— § 142. Задача 7. Найти условия перпендикулярности данных прямых и плоскостей (262).— § 143. Задача 8. Найти расстояние данной точки до данной плоскости (263).— § 144. Задача 9. Найти отно-

шение, в котором данная плоскость делит отрезок, соединяющий две данные точки (264).— § 145. Число независимых постоянных, определяющих положение плоскости и прямой в пространстве (264).— § 146. Связка прямых и плоскостей. Пучок плоскостей (265).— § 147. Задача 10. Найти прямую, проходящую через заданную точку и параллельную заданной прямой (или вектору) (269).— § 148. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную к заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (269).— § 149. Задача 12. Найти прямую, проходящую через две заданные точки (269).— § 150. Задача 13. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и параллельную заданной плоскости (270).— § 151. Задача 14. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную к заданной прямой или вектору (270).— § 152. Задача 15. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и заданную точку (270).— § 153. Задача 16. Найти плоскость, проходящую через три заданные неколлинеарные точки (271).— § 154. Задача 17. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и параллельную другой заданной прямой или вектору (273).— § 155. Задача 18. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и перпендикулярную к заданной плоскости (274).— § 156. Задача 19. Найти условия компланарности (пересечения) двух данных прямых (274).— § 157. Задача 20. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки M на заданную прямую Δ (275).— § 158. Задача 21. Найти расстояние заданной точки до заданной прямой (276).— § 159. Задача 22. Найти уравнения общего перпендикуляра к двум прямым (277).— § 160. Задача 23. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми (278).

Глава шестая. Мнимые и несобственные элементы, однородные декартовы и проективные координаты. Проективные преобразования

- I. Мнимые геометрические элементы 280
- § 161. Мнимые точки и векторы (280).— § 162. Мнимые прямые и плоскости (283).
- II. Однородные координаты и несобственные элементы. Координаты прямой и плоскости 285
- § 163. Однородные декартовы координаты на прямой (285).— § 164. Приложение к корням алгебраического уравнения (286).— § 165. Однородные декартовы координаты на плоскости (289).— § 166. Уравнение прямой на плоскости в однородных координатах (290).— § 167. Параметрическое представление прямой на плоскости в однородных координатах (298).— § 168. Однородные декартовы координаты в пространстве (300).— § 169. Параметрическое представление прямой в пространстве (306).— § 170. Координаты прямой на плоскости. Взаимность между точками и прямыми (306).— § 171. Координаты плоскости в пространстве. Взаимность между точками и плоскостями (309).— § 172. Основные геометрические образы проективной геометрии (310).— § 173. Преобразование однородных декартовых координат (311).— § 174. Уравнения алгебраических кривых и поверхностей в однородных координатах. Некоторые общие предложения (314).— § 175. Циклические точки и сферическая окружность (322).

III. Проективные координаты и проективные преобразования	325
§ 176. О дробно-линейных (гомографических) подстановках (325).— § 177. Проективные координаты точки (327).— § 178. Уравнения алгебраических линий и поверхностей в однородных проективных координатах (333).— § 178а. Параметрическое представление прямой и пучка в проективных координатах (336).— § 179. Проективные точечные преобразования (337).— § 180. Двойное отношение четырех точек (342).— § 181. Гармоническое разделение (347).— § 182. Инвариантность двойного отношения при гомографической подстановке (347).— § 183. Двойное отношение четырех прямых и четырех плоскостей пучка (349).— § 184. Проектирования и сечения (352).— § 185. Проективное соответствие между образами первой ступени (352).— § 186. Геометрическое значение проективных координат на прямой (354).— § 187. Двойное отношение четырех точек на прямой, заданной параметрически (356).— § 188. Двойное отношение четырех прямых (плоскостей) пучка, заданного параметрически. Проективные координаты в пучке (357).— § 189. Аналитическое выражение проективного соответствия двух образов первой ступени (359).— § 190. Наложённые образы первой ступени. Инволюция (360).— § 191. Геометрическое значение проективных координат на плоскости и в пространстве (363).— § 192. Геометрическое значение преобразований проективных координат на плоскости и в пространстве (368).— § 193. Основные свойства проективных точечных преобразований плоскости и пространства (368).— § 194. Корреляция (370).	
Глава седьмая. Простейшие уравнения и элементарные свойства конических сечений	
I. Нормальные уравнения конических сечений	372
§ 195. Определение эллипса и его нормальное уравнение (372).— § 196. Исследование формы эллипса (374).— § 197. Определение гиперболы и ее нормальное уравнение (377).— § 198. Исследование формы гиперболы. Асимптоты (379).— § 199. Свойства фокальных расстояний. Директрисы эллипса и гиперболы. Новое определение этих линий (382).— § 200. Определение параболы и ее нормальное уравнение (385).	
II. Эллипс, гипербола, парабола как конические сечения	390
§ 201. Пересечение прямого кругового конуса с плоскостью (390).— § 202. Получение данного конического сечения из данного конуса (393).	
III. Некоторые простейшие виды уравнений конических сечений.	
Подобие конических сечений	394
§ 203. Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам (394).— § 204. Параметрическое представление конических сечений. Построение по точкам (396).— § 205. Полярные уравнения конических сечений, отнесенных к фокусу (399).— § 206. Уравнения конических сечений, отнесенных к вершине (402).— § 207. Подобные конические сечения (404).	
Глава восьмая. Проективные свойства линии второго порядка. Касательная и поляра	
I. Проективная классификация линий второго порядка	407
§ 208. Обозначения (407).— § 209. Распадающиеся и нераспадающиеся	

дающиеся линии второго порядка. Совпадение линий второго порядка (411).— § 210. Условие распадаения линии второго порядка (412).— § 211. Каноническое уравнение линии второго порядка в проективных координатах. Проективная классификация (413).— § 212. Определение линии второго порядка по пяти точкам (416).— § 213. Пучок линии второго порядка (419).— § 214. Теорема Паскаля (421).— § 215. Образование линий второго порядка проективными пучками (423).

II. Пересечение линии второго порядка с прямою. Касательная § 216. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямою, в однородных координатах (424).— § 217. Касательная к линии второго порядка (426).— § 218. Касательная как предел секущей (427). 424

III. Полюс и поляр. Тангенциальное уравнение 432
 § 219. Проведение касательной из заданной точки плоскости. Полюс и поляр (432).— § 220. Другое определение полюса и поляры. Сопряженные точки (435).— § 221. Полярность, определяемая линией второго порядка (436).— § 222. Автополярный треугольник (437).— § 223. Сопряженные прямые. Тангенциальное уравнение линии второго порядка. Понятие класса (438).— § 224. Применение принципа взаимности к линиям второго порядка (440).

Глава девятая. Аффинные и метрические свойства линий второго порядка

I. Аффинная классификация. Центр, диаметры, асимптоты 441

§ 225. Аффинная классификация линий второго порядка (441).— § 225а. О распадающейся линии параболического типа (443).— § 226. Асимптотические направления (445).— § 227. Уравнения, определяющие пересечение линии второго порядка с прямой, в неоднородных декартовых координатах (446).— § 228. Центр линии второго порядка (448).— § 229. Асимптоты (451).— § 230. Диаметры линий второго порядка (453).— § 231. Связь диаметров с касательными (457).— § 232. Диаметры как поляры несобственных точек (458).— § 233. Построение центра и диаметров линии второго порядка, заданной очертанием. Дополнительные хорды (459).— § 234. Уравнение центральной линии второго порядка, отнесенной к сопряженным диаметрам (459).— § 235. Простейшие уравнения линий параболического типа (463).— § 236. Уравнения линий второго порядка, отнесенных к касательной и диаметру, проведенному через точку касания (464).

II. Главные диаметры. Нормальные уравнения в прямоугольных координатах 465

§ 237. Главные диаметры (465).— § 238. Нормальные уравнения конических сечений в декартовых прямоугольных координатах (467).— § 239. Об уравнении окружности (469).

III. Нормаль. Фокальные свойства касательных 471

§ 240. Нормаль к плоской линии (471).— § 241. Свойства касательных к эллипсу (471).— § 242. Свойства касательных к гиперболу (474).— § 243. Свойства касательных к параболе (476).

- IV. Исследование диаметров эллипса, гиперболы, параболы 478
 § 244. Диаметры эллипса (478).— § 245. Диаметры гиперболы (480).— § 246. Диаметры параболы (484).
- Глава десятая. Инварианты, определение формы и положения линии второго порядка**
- I. Инварианты 485
 § 247. Преобразование уравнения при замене декартовых координат (485).— § 248. Понятие инварианта. Примеры (488).— § 249. Основные инварианты уравнения линии второго порядка (490).— § 250. Метрические инварианты в случае обобщенных декартовых координат (494).— § 251. Приложение: теоремы Аполлония (496).
- II. Упрощение уравнения линии второго порядка 497
 § 252. Преобразование к центру (497).— § 253. Приведение квадратичной формы двух переменных к каноническому виду при помощи ортогональной подстановки (500).— § 254. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка (502).— § 255. Упрощение уравнения линии без определенного центра (505).— § 256. Второй способ упрощения уравнения совокупности двух параллельных прямых. Условный инвариант (509).— § 257. Сводка результатов. 1. Аффинная классификация линий второго порядка (511).— § 258. Сводка результатов. 2. Определение формы и размеров линии второго порядка по ее уравнению (513).— § 259. Сводка результатов. 3. Приведение уравнения к нормальному виду и определение положения линии на плоскости (514).— § 260. Условие подобия двух линий второго порядка (520).— § 261. Условие конгруэнтности двух линий второго порядка. Доказательство полноты системы ортогональных инвариантов A, A_{33}, S (523).
- Глава одиннадцатая. Основные свойства поверхностей второго порядка. Касательная плоскость, центр, диаметры**
- I. Проективная классификация. Касательная плоскость 528
 § 262. Обозначения (528).— § 263. Распадающиеся поверхности второго порядка. Условие совпадения (531).— § 264. Проективная классификация поверхностей второго порядка (532)
 § 265. Уравнение, определяющее пересечение прямой с поверхностью второго порядка в однородных координатах (538).— § 266. Касательные прямые. Касательная плоскость (538).— § 267. Поверхности с эллиптическими, гиперболическими и параболическими точками (540).— § 268. Касательный конус. Полярная плоскость и полюс. Тангенциальное уравнение (543).
- II. Аффинные свойства поверхности второго порядка. Центр, диаметры 546
 § 269. Пересечение с несобственной плоскостью. Аффинная классификация (546).— § 270. Уравнение, определяющее пересечение поверхности второго порядка и прямой в неоднородных декартовых координатах (549).— § 271. Центр (550).— § 272. Диаметральные плоскости (552).— § 273. Диаметральные плоскости и диаметры центральных поверхностей (554).— § 274. Диаметральные плоскости как полярные плоскости несобственных точек (555).— § 275. Асимптоты (555).

III. Метрические свойства. Главные диаметральные плоскости. Приведение уравнения к нормальному виду	555
§ 276. Главные диаметральные плоскости и главные направления (556).— § 277. Некоторые общие предложения о преобразовании квадратичной формы трех переменных (558).— § 278. Свойства корней уравнения $D(\lambda)=0$ и соответствующих главных направлений (560).— § 279. Преобразование уравнения поверхности при замене декартовых координат (566).— § 280. Ортогональные инварианты (567).— § 281. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 1. Центральные поверхности (569).— § 282. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 2. Поверхности без определенного центра (571).— § 283. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 3. Сводка результатов (574).— § 283а. О правиле знаков Декарта (576).	
Глава двенадцатая. Исследование формы отдельных поверхностей второго порядка. Прямолинейные образующие.	
Круговые сечения	
I. Исследование формы отдельных поверхностей	577
§ 284. Перечень нормальных уравнений отдельных поверхностей (577).— § 285. Сечения поверхностей второго порядка параллельными плоскостями (578).— § 286. Конус второго порядка (579).— § 287. Эллипсоид (581).— § 288. Однополый гиперболоид (583).— § 289. Двуполый гиперболоид (587).— § 290. Эллиптический параболоид (589).— § 291. Гиперболический параболоид (592).	
II. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка . . .	595
§ 292. Общие замечания (595).— § 293. Прямолинейные образующие однополлого гиперболоида (597).— § 294. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида (604).— § 295. Построение линейчатой поверхности второго порядка по трем заданным образующим (608).	
III. Круговые сечения поверхностей второго порядка	609
§ 296. Предварительные замечания (609).— § 297. Круговые сечения центральных поверхностей второго порядка (610).— § 298. Круговые сечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра 615.	
Д о б а в л е н и е. Элементарные сведения о линейных и квадратичных формах	
I. Об определителях и таблицах	617
§ 1. Некоторые свойства определителей (617).— § 2. Ранг определителя или таблицы (620).— § 3. Решение системы линейных уравнений с определителем, отличным от нуля 622.	
II. Линейные формы	623
§ 4. Алгебраические формы. Линейные формы (623).— § 5. Система линейных форм. Зависимые и независимые линейные формы (623).— § 6. Приложение к решению системы линейных однородных уравнений в общем случае (628).— § 6а. Частный случай (632).— § 7. Решение системы неоднородных уравнений	

(633). — § 8. Линейные подстановки (635).— § 9. Последовательность линейных подстановок (638).

III. Билинейные и квадратичные формы 639

§ 10. Билинейные и квадратичные формы (639).— § 11. Преобразование квадратичных форм (641).— § 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (644).— § 13. Условия распада квадратичной формы на два линейных множителя (649).— § 14. Ортогональные подстановки (651).— § 15. О приведении квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогональной подстановки (654).